الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الــدفــاع الوطـــني — **السنة الدراسية : 2020 / 2021**

أركان الجيش الوطني الشعبي — **دورة جوان 2021**

دائرة الاستعمال و التحضيـر

مديرية مدارس أشبال الأمــة

امتحان البكــالوريــا التجريـــــبــي

الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات — **المــدة : 04 ساعات و نصف**

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر v_1 و q عددان طبيعيان ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1.

I) عين v_1 و q علما أن v_1 و q أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.

II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

1) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441.

2) نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.

– أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

3) نعتبر α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) حلل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α, β) بحيث يكون: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$.

ج) نسجل قيم الحدود السته الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

– ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + ... + 1) \equiv 3[7]$.

3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7.

4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: (E)..... $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15$.

أ) عين $PGCD(C_{10}^2 ; A_{12}^2)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x, y).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E).

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لــ d حيث: $d = PGCD(x, y)$.

ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر النقطتين M و M' التين لاحقتاهما z و z' على الترتيب . نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .

نذكر أن $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طويلة العدد المركب z .

1) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\text{Re}\left(z'\overline{z}\right)=0$.

2) بين أن النقط O ، M و M' في استقامية إذا وفقط إذا كان $IM\left(z'\overline{z}\right)=0$.

3) لتكن N النقطة ذات اللاحقة z^2-1 . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين .

4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.

أ) بين أن $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها النقط O ، N و P في استقامية .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=x^2-\ln\left(x^2\right)$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذوالمعادلة $y=x$، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لــ(Δ).

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}3<\alpha<0{,}4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

4) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f).

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h). (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $F(x)=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}(\ln x^2)^2+2\ln|x|\right]$ هي دالة أصلية لــ f على $\mathbb{R}^*$.

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$. أحسب التكامل: $I=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.

2) أحسب احتمال سحب كريتان من نفس اللون .

3) أحسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان .

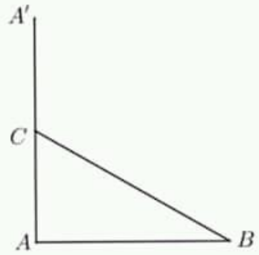
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E\left(X\right)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I . ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C . ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B .

1)عين نسبة وزاوية التشابه S .

2)أنشئ D صورة A بواسطة S .

3)ليكن Ω مركز التشابه المباشر S .

أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان.

ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان.

ج) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω .

II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث لاحقة B هي 1.

1) عين لاحقة كل من C و A' .

2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω .

3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

التمرن الثالث: (05 نقاط)

متتاليتا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) أ) احسب $\text{pgcd}(x_2;x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8;x_9)$

ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n.

3) أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n - y_n = 5$.

ب) أكتب y_n بدلالة n.

ج) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

4) نضع $d_n = \text{pgcd}(x_n;y_n)$.

أ) ما هي القيم الممكنة لـــــــ d_n.

ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بــــــــ : $g(x) = e^x(x-1) + 1$

1)أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

2)استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II. لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t \, dt$

1)أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x) = e^x - (1+x)$

2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0;x]$ أن: $1 \leq e^t \leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$.

3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x;0]$ أن: $e^x \leq e^t \leq 1$ ، ثم استنتج أن: $\frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

III. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بــــــ : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.

3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أرسم (T) و (C_f).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	I) تعيين العددين v_1 و q: لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_2 = v_1.q$ و $v_4 = v_1.q^3$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1.q^3 - v_1.q$ أي: $2v_1^2 = v_1.q\left(q^2-1\right)$ ومنه: $\boxed{2v_1 = q\left(q^2-1\right)}$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2 (حسب مبرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1,2\}$. - في حالة $q=1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض). - في حالة $q=2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$. إذن نتحصل على: $\boxed{q=2}$ و $\boxed{v_1=3}$.	0.75 ن	04.5 ن
	II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$. 1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n): نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $\boxed{v_n = 3\times 2^{n-1}}$.	0.25 ن	
	*) تعيين كل الحدود المحصورة بين 2020 و 1441: لدينا: $1441 \leq 3\times 2^{n-1} \leq 2020$ أي: $481 \leq 2^{n-1} \leq 673$ أي نجد: $\ln 481 \leq \ln 2^{n-1} \leq \ln 673$ أي: $\ln 481 \leq (n-1)\ln 2 \leq \ln 673$ و منه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \leq n-1 \leq \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8,9 \leq n-1 \leq 9,39$ ومنه: $9,9 \leq n \leq 10,39$ ، إذن: $\boxed{n=10}$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو: $\boxed{v_{10} = 1536}$	0.75 ن	
	2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$. المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا. أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9\times\frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $\boxed{S_n = 3\left(4^n-1\right)}$.	01 ن	
	*) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3\left(4^n-1\right)\right] = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.		

*) لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. 0.25 ن

3) لدينا: α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$. 0.25 ن

أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على: $\boxed{2304 = 2^8 \times 3^2}$. 0.25 ن

ب) تعيين كل الثنائيات (α, β):

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3\times 2^{\alpha-1})(3\times 2^{\beta-1}) = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} \alpha+\beta = 10 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha' + 2\beta' = 10$ أي نجد:

$\boxed{\alpha' + \beta' = 5}$.

لكن لدينا: $\alpha < \beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha' < \beta'$.

أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha', \beta') = (1,4)$ و $(\alpha', \beta') = (2,3)$.

إذن الثنائيات (α, β) المطلوبة هي: $\boxed{(\alpha,\beta) = (2,8)}$ و $\boxed{(\alpha,\beta) = (4,6)}$. 0.5 ن

4) الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3 ، 6 ، 12 ، 24 ، 48 ، 96 .

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3 .

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0 . 0.5 ن

التمرين الثاني 04 ن

1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

نجد: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي:

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

0.5 ن

ب) نعلم أن: $1440 \equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$. 0.25 ن

*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6: $2019 \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} \equiv 3^{2020}[6]$

لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{3^n \equiv 3[6]}$ و منه: $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي:

$2019^{2020} = 6k+3$.

إذن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3}[7]$ أي: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6 . 0.25 ن

2) لدينا: $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)\equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه:

$4\left(1\times\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}\equiv 4[7]$

ومنه يكون: $n-1=6k+2$ إذن: $\boxed{n=6k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$.

0.5 ن

3) أ) لنبين أن: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^2+6n+6$.

*) لنحسب $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}$:

$$2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2\times\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\times 2!}+\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$

$$=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

و منه: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=(n+1)n+(n+3)(n+2)=n^2+n+n^2+2n+3n+6$

إذن: $\boxed{2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^2+6n+6}$ هو المطلوب.

0.5 ن

ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}\equiv 0[7]$.

لدينا: $2n^2+6n+6\equiv 0[7]$ أي: $2\left(n^2+3n+3\right)\equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$n^2+3n+3\equiv 0[7]$ أي: $n^2+3n\equiv -3[7]$ و منه: $n^2+3n\equiv 4[7]$.

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7):

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	$[7]$
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	$[7]$
$3n\equiv$	0	3	6	2	5	1	4	$[7]$
$n^2+3n\equiv$	0	4	3	4	0	5	5	$[7]$

وبالتالي يكون: $n\equiv 1[7]$ أو $n\equiv 3[7]$ أي: $\boxed{n=7k+1}$ أو $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$.

0.75 ن

4) لدينا: $C_{10}^{2}x-A_{12}^{2}y=15\ .....(E)$.

أ) لنعين $PGCD\left(C_{10}^{2};A_{12}^{2}\right)$:

نعلم أن: $C_{10}^{2}=\frac{10!}{8!\times 2!}=45$ و $A_{12}^{2}=\frac{12!}{10!}=132$ ومنه $PGCD\left(C_{10}^{2};A_{12}^{2}\right)=3$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x-132y=15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ لأن: $PGCD(45,132)=3$ و 3 يقسم 15.

0.25 ن

ب) لدينا: $45x-132y=15$ أي تصبح: $15x-44y=5$ أي: $44y=15x-5$ أي:

$44y=5(3x-1)$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غــوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y=5k$ أي: $\boxed{y\equiv 0[5]}$ هو المطلوب.

0.25 ن

*) لنحل المعادلة (E):

نبحث أولا عن الحل الخاص أي: $y=5$ و منه: $44\times 5=5(3x-1)$ أي: $44=3x-1$ إذن:

$x=15$. ومنه: $(x_0,y_0)=(5,15)$.

لدينا: $\begin{cases}15x-44y=5\\ 15(15)-44(5)=5\end{cases}$ بالطرح نجد: $15(x-15)=44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44

وحسب مبرهنة غوص نستنتج أن: $\begin{cases}x-15=44k\\ y-5=15k\end{cases}$ إذن: $\boxed{x=44k+15}$ و $\boxed{y=15k+5}$.

ومنه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

5) أ) لدينا الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E) أي يكون: $15x-44y=5$ و بما أن: — 0.25 ن

$PGCD(x,y)=d$ فإن: d يقسم $(15x-44y)$ و d يقسم 5 ، إذن قيم d هي: 1 ، 5 . — 0.25 ن

ب) لندرس حالة $d=5$ أي: $x\equiv0[5]$ أي: $44k+15\equiv0[5]$ أي: $4k\equiv0[5]$ و منه:

$k\equiv0[5]$

أي يكون: $\boxed{k=5\alpha}$ مع $(\alpha\in\mathbb{Z})$.

إذن: $d=5$ لما $k=5\alpha$ و بالتالي يكون: $d=1$ لما $k\neq5\alpha$ — 0.25 ن

و منه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\neq5\alpha)$.

التمرين الثالث — 04 ن

1) لدينا : $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ متعامدين معناه $xx'+yy'=0$.

$z'\overline{z}=(x'+iy').(x-iy)=(xx'+yy')+i(xy'-yx')$. — 0.75 ن

ومنه : $xx'+yy'=0$ تكافئ $\mathrm{Re}(z'\overline{z})=0$.

2) النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ مرتبطان خطيا أي $xy'+yx'=0$ وهذا يكافئ $IM(z'\overline{z})=0$. — 0.75 ن

3) لدينا : $(z^2-1)\overline{z}=|z|z-\overline{z}=(x^2+y^2)(x+iy)-(x-iy)$

$=x(x^2+y^2-1)+iy(x^2+y^2+1)$

$\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين يكافئ $\mathrm{Re}((z^2-1)\overline{z})=0$ أي $x(x^2+y^2-1)$ ومنه $x=0$ أو $x^2+y^2=1$. — 01ن

مجموعة النقط M هي اتحاد محور التراتيب مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq0$.

أ) $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(-\overline{z}^2\right)\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$. — 0.75 ن

ب) O ، N و P في استقامية تكافئ $IM\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right)=0$ أي

$IM\left(-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right)=0$.أي $IM\left(-\overline{z}^2\right)=0$ ومنه $2xy=0$ أي $x=0$ أو $y=0$. — 0.75 ن

ومجموعة النقط M هي اتحاد محور الفواصل مع محور التراتيب باستثناء المبدأ O .

التمرين الرابع — 07.5 ن

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $g(x)=x^2-\ln(x^2)$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

*) الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$.

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x.(2x^2-2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$2x2-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

0.5 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

0.25 ن

0.75 ن

*) النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} 0} g(x)=+\infty$. 0.25 ن

2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.

1) أ) حساب النهايات:

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{2}{x^2}+1+\frac{\ln(x^2)}{x^2}\right)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2}=0$

فبوضع: $x^2=t$

هذه الأخيرة تصبح: $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0}$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}=0$. 0.5 ن

ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانيا:

*) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$ و 0.5 ن

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=-\infty$. 0.25 ن

*) التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x=0$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x)=\frac{-2}{x^2}+1+\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}=\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}$ ، إذن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و هو المطلوب. 0.25 ن

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f : نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون: 0.25 ن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

0.25 ن

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f):

أي نحسب: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln(x^2)}{x}\right]=0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f).

0.25 ن

*) دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]=\frac{2+\ln(x^2)}{x}$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-e^{-1}$		0		e^{-1}	$+\infty$
x	$-$		$-$	‖	$+$	0	$+$
$2+ln(x2)$	$+$	0	$-$	0	$-$		$+$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	يقطع	(C_f) فوق (Δ)

0.25 ن

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f(x)+f(-x)=0$.

لدينا: $f(x)+f(-x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}-x-\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

إذن و بما أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر.

0.25 ن

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3<\alpha<0,4$. و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0,4$ و $-0,3$ أي يكون: $-0,4<\beta<-0,3$.

0.25 ن

4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x)=1$ ، لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة.

لدينا: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}=1$ أي: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}-1=0$ أي تصبح: $\frac{-\ln(x^2)}{x}=0$ أي:

$$\begin{cases}-\ln(x^2)=0\\ x^2\neq 0\end{cases}$$

0.25 ن

هذا يكافئ: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيان للمستقيم (Δ).

0.25 ن

*) كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0=1$: $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T_1): y=x+2$.

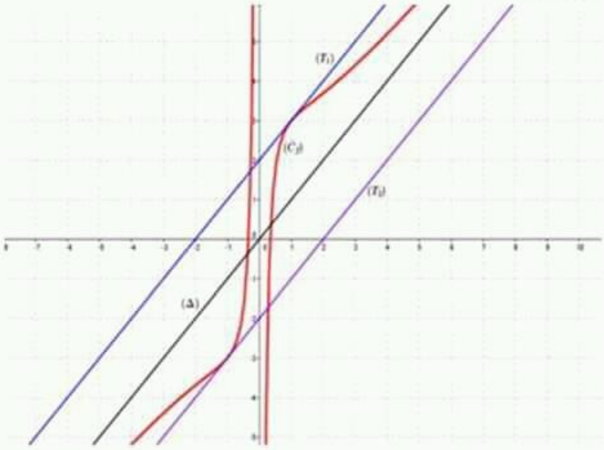
0.25 ن

*) كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0=-1$: $(T_2): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه:

0.25 ن

$(T_2): y = x - 2$.

ب) الإنشاء:



0.75 ن

5) لدينا: $h(x) = \left[\dfrac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \dfrac{2}{x+1}\right] + 2$ أي يكون: $h(x) = f(x+1) + 2$.

إذن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. *0.25 ن*

6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$:

لدينا: $F'(x) = x + \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{x} \times \ln x^2 + \dfrac{2}{|x|} = x + \dfrac{\ln(x^2)}{x} + \dfrac{2}{|x|}$.

*) إذا كان $x > 0$ فإن: $F'(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x < 0$ فإن: *0.25 ن*

$F'(x) = \frac{-2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$.

ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي: *0.25 ن*

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\left[\ln(x)^2\right]^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}$.

ج) حساب التكامل $I = \int_1^{\lambda} f(x)dx$ مع $\lambda > 1$: *0.25 ن*

لدينا: $I = \int_1^{\lambda} f(x)dx = [F(x)]_1^{\lambda} = F(\lambda) - F(1)$ و منه: $I = F(\lambda)$ لأن: $F(1) = 0$. *0.25 ن*

*) التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \lambda$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـدفـاع الوطـنـي
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمـة

السنة الدراسية : 2020 / 2021
المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

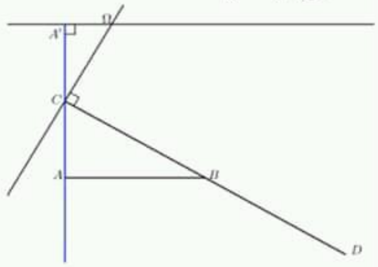
الموضوع الثاني

محاور الموضوع	عناصـر الإجـابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^{2}=90$.	0.5 ن	04 ن
	2) لتكن A حادثة سحب كريتان من نفس اللون: $P(A)=\frac{A_4^2+A_6^2}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$.	0.75 ن	
	3) لتكن B حادثة سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان : $P(B)=\frac{A_4^2}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.	0.75 ن	
	4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة . أ) قيم X الممكنة : $X(\omega)=\{0;1;2\}$.	0.75 ن	
	قانون احتمال X : $P(X=0)=\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$. $P(X=1)=\frac{A_4^1\times A_6^1\times C_2^1}{A_{10}^2}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$. $P(X=2)=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.		
	جدول قانون الاحتمال (أدناه)	0.75 ن	

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

<table>
<tr><td></td><td>ب) الأمل الرياضياتي:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$.E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{12}{15}=0,8$</td><td>0.5 ن</td><td></td></tr>
<tr><td>التمرين الثاني</td><td>1) لدينا $\begin{cases}S(A')=C\\S(C)=B\end{cases}$ يعني $\begin{cases}CB=k\,A'C\\(\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{CB})=\theta+2k\pi\end{cases}$
ومنه $\begin{cases}k=\frac{CB}{A'C}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\\ \theta=(\overrightarrow{CA'};\overrightarrow{CB})+\pi=-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}\end{cases}$.</td><td>01.5 ن</td><td>04 ن</td></tr>
<tr><td></td><td>2) بما أن C مصف $[AA']$ فإن B منتصف $[CD]$.</td><td>0.25 ن</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>أ) $C\Omega^2+CB^2=C\Omega^2+(\overrightarrow{C\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})^2$
$=2C\Omega^2+\Omega B^2-4\times\Omega C\times\Omega C\times\frac{1}{2}=\Omega B^2$
و منه $(C\Omega)$يعامد(CB)</td><td>0.25 ن</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>ب) $A'\Omega^2+A'C^2=A'\Omega^2+(\overrightarrow{A'\Omega}+\overrightarrow{\Omega C})^2$
$=2A'\Omega^2+\Omega C^2-4\times\Omega A'\times\Omega A'\times\frac{1}{2}=\Omega C^2$
و منه $(A'\Omega)$يعامد$(A'C)$</td><td>0.25 ن</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد(BC) في C مع المستقيم الذي يعامد$(A'C)$ في A' .</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>II .1) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CA}{AB}$ إذن $CA=AB\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>0.25 ن</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>و منه $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $A'\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$</td><td>0.5 ن</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل
$z'=(1+i\sqrt{3})z+b$
و بما أن $S(A')=C$ فإن $\frac{i\sqrt{3}}{3}=(1+i\sqrt{3})\frac{2i\sqrt{3}}{3}+b$ إذن $b=\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$
و منه $z_\Omega=\frac{6-i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}}=\frac{1}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$</td><td>0.75 ن</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3) $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ يعني $\arg(z-z_{A'})=-\frac{\pi}{2}$
يعني $(\vec{u},\overrightarrow{A'M})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم</td><td>0.25 ن</td><td></td></tr>
</table>

المفتوح $[A'A)$



التمرين الثالث — **05 ن**

1) $x_0 = 3 = 2^1 + 1$

لنفرض أن $x_n = 2^{n+1} + 1$ ، $n \geq 0$ إذن

$x^{n+1} = 2x_n - 1 = 2\left(2^{n+1} + 1\right) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$ — 01 ن

و منه من أجل كل طبيعي n ، $x_n = 2^{n+1} + 1$ — 0.25 ن

2) أ) $p\gcd\left(x_2; x_3\right) = p\gcd(7;17) = 1$ — 0.25 ن

$\text{pgcd}\left(x_8; x_9\right) = \text{pgcd}(513;1025) = 1$ — 0.25 ن

ب) $2x_n - x_{n+1} = 2^{n+2} + 2 - 2^{n+2} - 1 = 1$ و منه حسب بيزو فإن x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما — 01 ن

3) أ) $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$ لنفرض أن $2x_n - y_n = 5$

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2\left(2x_n - 1\right) - 2y_n - 3 = 2\left(2x_n - y_n\right) - 5 = 2\times5 - 5 = 5$ — 0.25 ن

و منه من أجل كل طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$

ب) $y_n = 2x_n - 5$ يعني $y_n = 2^{n+2} - 3$

ج) لدينا $2 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^4 \equiv 1[5]$ و منه من أجل كل p من ℕ :

$2^{4p} \equiv 1[5]$ — 01 ن

$2^{4p+1} \equiv 2[5]$

$2^{4p+2} \equiv 4[5]$ — 0.25 ن

$2^{4p+3} \equiv 3[5]$

4) أ) بما أن $2x_n - y_n = 5$ فإن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ — 0.5

ب) $d_n = 5$ يكافئ $\begin{cases} x_n \equiv 0[5] \\ y_n \equiv 0[5] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0[5] \end{cases}$ — 0.5 ن

يعني $\begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3[5] \end{cases}$ يعني $n = 4p + 1$ — 0.5 — 0.25 ن

و أخيرا يكون x_n و y_n أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان

$n = 4p$ أو $n = 4p + 2$ أو $n = 4p + 3$

التمرين الرابع — 07 ن

I . 1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g'(x)=xe^x$ — 0.25 ن

g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. — 0.25 ن

x	$-\infty$		0		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$	

— 0.25 ن

2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0)=0$ نستنتج أن g موجبة على $\mathbb{R}$

II . 1) حساب $I(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$

نضع $\begin{cases} u(t)=x-t \\ v'(t)=e^t\,dt \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t)=-dt \\ v(t)=e^t \end{cases}$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد — 01 ن

$$I(x)=\left[(x-t)e^t\right]_0^x+\int_0^x e^t\,dt=\left[(x-t)e^t+e^t\right]_0^x=e^x-x-1=e^x-(x+1)$$

2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0;x]$ معناه $0\le t\le x$ أي $1\le e^t\le e^x$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^t(x-t)\le e^x(x-t)$ واخيرا

بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_0^x (x-t)\,dt\le\int_0^x e^t(x-t)\,dt\le\int_0^x e^x(x-t)\,dt$

يعني $\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le I(x)\le\left[e^x\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^x$ يعني $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^x}{2}$. — 0.5 ن

3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x;0]$ معناه $x\le t\le 0$ أي $e^x\le e^t\le 1$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^t(x-t)\le e^x(x-t)$ لأن $(x-t)$ **سالب** واخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى

$\int_x^0 (x-t)\,dt\le\int_x^0 e^t(x-t)\,dt\le\int_x^0 e^x(x-t)\,dt$ لأن x **حقيقي سالب** يعني

$$\left[\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0\le -I(x)\le\left[e^x\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0$$ — 0.5 ن

يعني $-\frac{x^2}{2}\le -I(x)\le-\frac{x^2e^x}{2}$ و منه $\frac{x^2e^x}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$.

4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^x}{2}$ أي

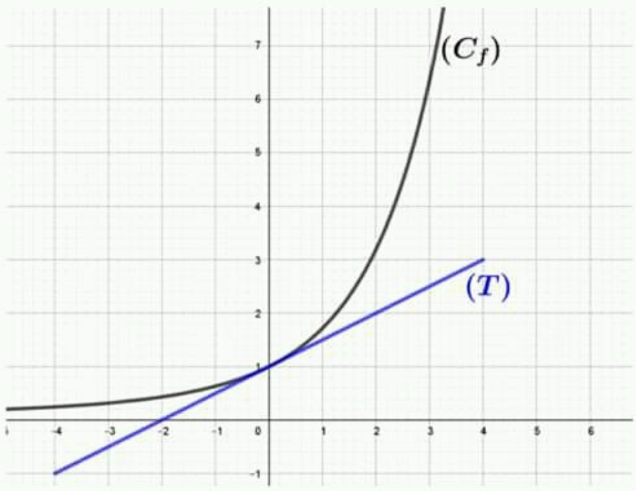
$\frac{x^2}{2}\le e^x-(1+x)\le\frac{x^2e^x}{2}$ و منه

من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2}\le\frac{e^x-(1+x)}{x^2}\le\frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}\ldots(1)$$

من أجل كل x سالب $\frac{x^2e^x}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$ أي $\frac{x^2e^x}{2}\le e^x-(1+x)\le\frac{x^2}{2}$ و منه

من أجل كل x سالب

	تماما $\frac{1}{2} \le \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} ...(2)$ من (1) و (2) نستنتج أن $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	0.5 ن	
	III . 1) حساب النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left(1-e^{-x}\right) = +\infty$	0.25 ن 0.25 ن	
	2) من السؤال II. 4نجد $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ و منه f قابلة للاشتقاق 0 عند و $f'(0) = \frac{1}{2}$.	0.75 ن	
	من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $f'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f'>0$ على $\mathbb{R}$. إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.	01 ن	
	$(T): y = \frac{1}{2}x+1$	0.5 ن	
		01 ن	